Test Telematico di Matematica (A)

Scienze Agrarie   1/06/2021

1) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x+1}\right) .$$

2) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \log\left|\frac{x}{x-1}\right| ,$$

determinare gli eventuali asintoti verticali.

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) \;=\; \sqrt{x-1}\; e^{x+1}$$

e calcolarne la funzione derivata prima.

4) Calcolare

$$\int_{1/e}^{e} \frac{\log(x)}{x^2}\, dx .$$

Soluzione

1) Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$.
Moltiplicando numeratore e denominatore per la somma delle due radici si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x+1}} = +\infty$$

2) La funzione non risulta definita per $x = 0$ e $x = 1$. Risulta

$$\lim_{x\to0}\log\left|\frac{x}{x-1}\right| = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to1}\log\left|\frac{x}{x-1}\right| = +\infty\,.$$

Dai due limiti si deduce che la funzione data ha due asintoti verticali di equazione

$$x = 0\,, \qquad x = 1\,.$$

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $x - 1 \geq 0$.
Si ha quindi

$$D = [1, +\infty[\,.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,e^{x+1} + \sqrt{x-1}\,e^{x+1} = \frac{2x-1}{\sqrt{x-1}}\,e^{x+1}\,.$$

4) Integrando per parti, risulta

$$\begin{aligned}
\int_{1/e}^{e}\frac{\log(x)}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{x}\log(x)\right]_{1/e}^{e} + \int_{1/e}^{e}\frac{1}{x}\frac{1}{x}\,dx \\
&= -\frac{1}{e} - e + \left[-\frac{1}{x}\right]_{1/e}^{e} \\
&= -\frac{1}{e} - e - \frac{1}{e} + e \\
&= -\frac{2}{e}
\end{aligned}$$